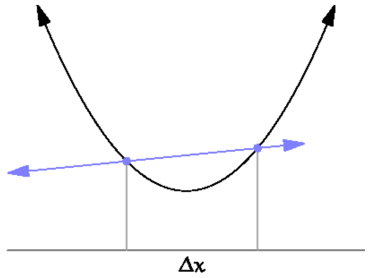
2.19 모형 로켓을 수직으로 발사, 로켓의 높이 y는 bt-ct² 으로 변하며, b = 82 m/s, c = 4.9 m/s² , t 는 초, y는 미터 단위이다. a) 로켓의 속도를 시간의 함수로 구하라. b) 언제 속도가 0이 되는가?

➔ tip) 변수 x에대한 상미분 $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$, ex) $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} \times x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

sol) 속도는 단위시간에대한 위치변화량 : $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, 위치에 대한 시간 함수에 시간으로 미분 = 속도



ans.) a) y = bt-ct² ➔ $v = \frac{dy}{dt} = b - 2ct$

b) v = 0 = $b - 2ct$ ➔ $t = \frac{b}{2c} = \frac{80\ m/s}{9.8\ m/s^2} = 8.2\ s$

2.59 높이 82.0 m에서 폭북이 폭발하면서 발생한 파편들의 속도 범위는 아래 방향으로 7.68 m/s, 위방향으로16.7 m/s 까지이다. 파편들이 지면에 도달하는 시간 간격은 얼마인가?

➔ Sol) 초기 위치 y_0 = 82 m, 제일 빨리 하강하는 파편의 초기속도 v_{10} = -7.68 m/s , 제일 늦게 하강하는 파편의 초기 속도 v_{20} = 16.7 m/s, 제일 빨리 도달하는 파편부터 제일 늦게 도달하는 파면까지 시간 차 = $\Delta t = t_2 - t_1$, 파편이 지면에 도달할 때 y_1 = 0 m, y_2 = 0 m, 이때의 시간은 각각 t_1 , t_2 .

$$y_1 = y_0 + v_{10}t - \frac{1}{2}gt^2 = 82.0\text{ m} + (-7.68\text{ m/s})t - \frac{1}{2}(9.80\text{ m/s}^2)t^2$$

$$t_1 = 3.382\text{ s.}$$

$$y_2 = y_0 + v_{20}t - \frac{1}{2}gt^2 = 82.0\text{ m} + (16.7\text{ m/s})t - \frac{1}{2}(9.80\text{ m/s}^2)t^2$$

$$t_2 = 6.136\text{ s.}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx 2.75\text{ s}$$

ans.) 약 2.75초의 간격을 가짐.

2.62 t = 0 일때, 처음위치 x_0 에서 출발한 입자가 속력 v_0 으로 양의 x축 방향으로 움직이는데, 음의 x 축 방향으로 크리 인 가속도가 작용한다. a) 처음위치 x_0 로 되돌아오는데 걸린 시간, b) 처음 위치를 지날 때의 속력을 구하라.

➔ Tip) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, sol) a) 가속도 a = $-\alpha$, 위치 x = x_0 일때의 시간이 되돌아오는데 걸린 시간(단 t≠0)

이므로 $0 = v_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2$, 가 되어 $t = 2v_0/\alpha$ 가 된다.

b) $v = v_0 + (-\alpha)t = v_0 - \alpha(2v_0/\alpha) = -v_0$ 처음출발과 같은 속력, 단 방향은 반대.

2.63 속력 32 m/s로 들어온 하키 퍽이 35 cm 두께의 눈덩이를 빠져나오는 속력이 18 m/s 이다. a) 눈덩이를 빠져나오는데 걸린 시간은 얼마인가? b) 하키 퍽이 완전히 멈추려면 두께는 얼마여야하는가?

➔ Tip) $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$, sol) a) 나중속도 18 m/s 를 v 로, 처음속도 32 m/s 를 v0 로, 위치변화인 x-x0 를 눈덩이 두께로 하여 식을 정리하면, $(18\, m/s)^2 = (32\, m/s)^2 + 2a(0.35\, m)$ 로 $a = -1$ km/s^2, 가속도는 속도의 변화량이므로 v = v_0 + at 로 18 = 32 − 1000t , t = 0.014 초

b) 완전히 멈추기위해서는 a) 식에서 두께에 대응되는 위치변화량을 x 로 두고, 최종속도는 0으로 하여 다시구하면, $(0\, m/s)^2 = (32\, m/s)^2 - 2000\, m/s^2 \times (x\, m)$ 로 x =0.512 m 가 된다. 눈덩이 두께 51.2 cm.

2.96 어떤 물체의 가속도는 시간에 따라 지수형으로 감소한다. 즉, $a(t) = a_0 e^{-bt}$ 이고 a_0 와 b는 상수. a) 문체가 정지 상태에서 출발한 경우, 그 속력을 시간의 함수로 구하라. b) 속력은 무한히 증가하나? c) 물체가 출발점으로부터 무한히 멀리 이동하는가?

➔ Tips) 속도를 미분하면 가속도, 반대로 가속도를 적분하면 속도, $v(t) = \int a(t)dt = a_0 \int e^{-bt}\ dt = -\frac{a_0}{b}\ e^{-bt} + C$

a) $v(t) = -\frac{a_0}{b}\ e^{-bt} + C$, 여기서 t=0 일때, v(0) =- $\frac{a_0}{b}$+C 으로 초기조건이 정지 상태이므로

v(0) =- $\frac{a_0}{b}$+C 에 해당하는 상수 C = $\frac{a_0}{b}$ 가되어 v(0) = - $\frac{a_0}{b}$+ $\frac{a_0}{b} = 0$, 이 된다. 즉 $v(t) = -\frac{a_0}{b}\ e^{-bt} + \frac{a_0}{b}$ 가 되어

즉, $v(t) = \frac{a_0}{b}\left(1 -\ e^{-bt}\right)$

b) 시간이 무한으로 간다면 exponential 항은 0 으로 수렴되므로 속도는 일정하게 됨. (종단속도)

→ 현실에서는 유체안에서 물체가 떨어질때의 특성에대한 상수로 a_0 와 b 를 얻어 $v_0 = a_0/b$ 로 계산.

c) 물체가 정지하는 것이 아닌 일정한 속도로 유지되기때문에 무한의 시간의 경우 무한히 이동.

$x(t) = \int v(t)dt = \frac{a_0}{b}\int(1 - e^{-bt})\ dt\ \rightarrow\ \infty$

- 특수 함수 미분 적분 => exponential 함수의 미분과 적분 : 자연상수(e)의 지수함수를 미분을 하면 그 자신된다.
- 예) $f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^x$ $\big($미분시 자기자신$\big)$, $\int f'(x)dx = \int e^x\, dx = e^x + C$ (적분을 해도 자기 자신이됨)
- 지수앞 상수만 미분시 내려옴 $f(x) = e^{ax} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = ae^{ax}$, $\int f'(x)dx = \int \frac{1}{a} e^{ax}\, dx = e^{ax} + C$