

8.11 지구 질량과 같은 행성에 착륙한 우주선의 무게가 지구의 2배이다. 행성의 반지름은?

→ Sol) 중력의 근원은 만유인력의 법칙 : $F = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$ 으로 두 물체의 질량은 같고, 만유인력상수 또한 같으므로, 반지름의 차이가 중력의 2배차이를 만드는 것. $F_{earth} = G \frac{M_{earth} M_{spaceship}}{R_{earth}^2}$, $F_{planet} = G \frac{M_{planet} M_{spaceship}}{R_{planet}^2}$

$F_{earth} = 2F_{planet}$ 이므로 같은 값은 제거하면 $\frac{1}{2} = \frac{R_{planet}^2}{R_{earth}^2}$ 이므로 $R_{planet} = \frac{R_{earth}}{\sqrt{2}}$, $\frac{6400 \text{ km}}{1.414} \approx 4500 \text{ km}$

8.19 지구 정지 궤도를 도는 위성의 속력을 구하라.

→ Sol) 정지 궤도를 도는 위성을 정지 위성이라고 하며, 이는 지구에서 위성을 볼때 위성이 하늘에서 정지되어 있어 보이는 것처럼 보여지기때문이다. 즉 정지위성은 지구 자전과 동일한 시간(주기 T=24시간=86400초)으로 지구를 돈다. 다만 속력은 거리/시간 이므로 거리를 구해야 하는데, $v = (2\pi r)/T$ 을 이용하고, $F=ma$ 로 중력=구심력으로,

$\frac{GM_E m_s}{r^2} = \frac{m_s v^2}{r}$ (위성과 지구를 완전한 구형으로 취급), 여기서 $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ 로 정리되어 $v = (2\pi r)/T$ 에 대입하면,

$\sqrt{\frac{GM}{r}} = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}}$ 을 얻을 수 있고, 다시 $v = (2\pi r)/T$ 에 r을 대입하여 v를 구하면

$v = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM_E}{T}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})}{86,400 \text{ s}}} = 3070 \text{ m/s}$, 로 구할 수 있다.

검산 확인을 위해 $v = (2\pi r)/T$ 로 거리를 구하면, $r = \frac{vT}{2\pi} = \frac{(3070 \text{ m/s})(86,400 \text{ s})}{2\pi} = 4.22 \times 10^7 \text{ m}$ 가 된다.

8.28 질량이 $2.9 \times 10^{24} \text{ kg}$ 인 행성의 탈출속력은 7.1 km/s 이다. 이 행성의 반지름은 얼마인가?

→ Sol) $0 = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ 에서 탈출속력 $v_{esc} = \sqrt{2GM/r}$ 을 얻을 수 있고,
 중력상수 G 는 $6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ 이므로 식에 대입하면,

$$v_{esc} = \sqrt{2(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(2.9 \times 10^{24} \text{ kg})/(\text{행성반지름 } m)} = 7.1 \text{ km/s.}$$
 이므로 정리하면

$$r = \frac{v_{esc}^2}{2GM} = \frac{7100 \text{ m/s} \times 7100 \text{ m/s}}{2(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(2.9 \times 10^{24} \text{ kg})} = 1.303 \times 10^7 \text{ m}$$

8.40 $4 \times 10^6 \text{ kg}$ 의 구형 물탱크에서 15 m 아래에 서 있는 사람의 무게는 물탱크의 인력으로 얼마나 감소 하는가?

→ Sol) 중력과 반대방향으로 물탱크의 인력에 의해 기존 사람의 무게 $w = mg$ 가 감소하는 상황.
 주어진 정보만으로 계산을 하기위해서는 물탱크의 인력이 중력에 비해 얼마나 되는가를 보면 된다.
 즉 물탱크인력 / 중력 으로 F_w / mg 를 하면 중력 가속도에 대한 계산

$$\text{감소비율} = F_w / mg = \frac{GM_w m}{r^2 mg} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(4 \times 10^6 \text{ kg})(\text{사람질량})}{(15 \text{ m})^2 (\text{사람질량}) (9.8 \text{ m/s}^2)} = 1.21 \times 10^{-7}$$
 원래 무게에 대해서 1.21×10^{-7} 만큼의 무게가 감소

8.48 원형 궤도의 2개 위성중, A는 지구 중심에서 B보다 4배 더 먼 거리에 있다. 두 위성의 궤도 주기를 비교하라

→ Sol) $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{일정 (케플러 3법칙)},$
 위성의 주기와 반지름의 비율이 일정하다는 케플러 법칙을 그대로 이용하면,

$$\frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{r_A^3}{r_B^3} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^{3/2}$$
 가 된다. 여기에 B 반지름이 4배 더 크므로 $r_A = 4r_B$ 로 대입하면 $4^{3/2} = 8$